1.- ÁLGEBRA

OPCIÓN A

a) (1'5 puntos) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ de orden 2. Hallar la relación entre ***a , b , c*** para que se verifique $\mathbf{A^{-1} = 2I - A}$

$$A\cdot A^{-1}=A(2I-A)\Rightarrow I=2AI-A^2\Rightarrow I=2A-A^2$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2A=2\cdot\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2a\\ 2b & 2c\end{pmatrix}\\ A^2=\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+ab & 2a+ac\\ 2b+bc & ab+c^2\end{pmatrix}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{pmatrix}4 & 2a\\ 2b & 2c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4+ab & 2a+ac\\ 2b+bc & ab+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}4-4-ab & 2a-2a-ac\\ 2b-2b-bc & 2c-ab+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-ab & -ac\\ -bc & 2c-ab+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{r} -ab=1\\ -ac=0\\ -bc=0\\ 2c-ab+c^2=1\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$2c-(-1)+c^2=1\Rightarrow 2c+c^2=0\Rightarrow c\cdot(c+2)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} c=0\\ c+2=0\Rightarrow c=-2\end{array}\right.$$

$$Si\ c=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} ac=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a=0\Rightarrow Im\ posible\ porque\ ab=-1\\ a\neq 0\Rightarrow b=-\dfrac{1}{a}\end{array}\right.\\ bc=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} b=0\Rightarrow Im\ posible\ porque\ ab=-1\\ b\neq 0\Rightarrow a=-\dfrac{1}{b}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$Si\ c=-2\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} ac=0\Rightarrow a=0\\ bc=0\Rightarrow b=0\end{array}\right.$$

b) (1 punto) Calcular, en función del parámetro ***k***, el rango de la matriz $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 5 & -1 & k\end{pmatrix}$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 5 & -1 & k\end{vmatrix}=k-30-1-5+3+2k=3k-33\Rightarrow Si\ |B|=0\Rightarrow 3\cdot(k-11)=0\Rightarrow k-11=0\Rightarrow k=11$$

$$Si\ k\neq 11\Rightarrow |B|\neq 0\Rightarrow rango(B)=3$$

$$Si\ k=11\Rightarrow |B|=0\Rightarrow adj(B)=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1+2=3\neq 0\Rightarrow rango(B)=2$$

OPCIÓN B

a) (1'25 puntos) Resolver el siguiente determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a+c & -b-a & -c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix}$ sin utilizar la regla de Sarrus

$$Sumando\ 1^a\ y\ 2^a\ fila \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & -a & b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix} \Rightarrow Sumando, de\ nuevo, 1^a\ y\ 2^a\ fila \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+c & b-a & c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix} Restando\ 2^a\ y\ 3^a\ fila \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+c & b-a & c+b \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Por\ tener\ una\ fila\ de\ ceros$$

b) (1'25 puntos) Para $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, calcular $\mathbf{M^n}$ con $n \in N$

$$M^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\cdot 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} \\ 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot 1 & 1\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{3}{4} & -\frac{3}{8}+\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{3}{4}+\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow M^3 = M^2 \cdot M = I_2 \cdot M = M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow M^4 = I_2 \cdot I_2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Si\ n = par \Rightarrow M^n = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ Si\ n = impar \Rightarrow M^n = M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.- GEOMETRÍA

OPCIÓN A

a) (1'5 puntos) Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos **A(5 , 0 , 1)** ; **B(4 , 1 , 0)** y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$

.

$$r \equiv \begin{cases} -2x+4y-6z=0 \\ 2x+y-z=5 \end{cases} \Rightarrow 5y-7z=5 \Rightarrow 5y=5+7z \Rightarrow y=1+\frac{7}{5}z \Rightarrow 2x+1+\frac{7}{5}z-z=5 \Rightarrow$$

$$2x+\frac{2}{5}z=4 \Rightarrow 10x+2z=20 \Rightarrow 10x=20-2z \Rightarrow x=2-\frac{1}{5}\cdot z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-\frac{1}{5}\cdot z \\ y=1+\frac{7}{5}z \\ z=z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r}=\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5},1\right) \equiv (-1,7,5) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1+7\lambda \\ z=5\lambda \end{cases}$$

El plano buscado π esta generado por el vector de la recta, del que es paralela; el vector formado por los puntos **A** y **B** y el vector generador formado por el punto generador **G** y uno de los puntos dados. Estos tres planos son coplanarios siendo la matriz, formada por ellos, nula

$$x-z=2 \Rightarrow x=2+z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-1,7,5) \\ \overrightarrow{AB}=(4,1,0)-(5,0,1)=(-1,1,-1) \equiv (1,-1,1) \Rightarrow \\ \overrightarrow{AG}=(x,y,z)-(5,0,1)=(x-5,y,z-1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5\cdot(x-5)-y+7\cdot(z+1)-(z+1)-7\cdot(x-5)-5y=0 \Rightarrow$$

$$-12\cdot(x-5)-6y+6\cdot(z+1)=0 \Rightarrow 12x+6y-6z-60-6=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y-z-9=0$$

b) (1 punto) Estudiar si los vectores $\vec{u}=(1,-1,1); \vec{v}=(1,0,0)$ y $\vec{w}=(2,-2,1)$ son linealmente independientes

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=0 \Rightarrow \alpha(1,-1,1)+\beta(1,0,0)+\gamma(2,-2,1)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=0 \\ -\alpha-2\gamma=0 \\ \alpha+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3\gamma=0 \Rightarrow \gamma=0 \Rightarrow \alpha+0=0 \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow 0+\beta+0=0 \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow \textit{Son linealmente independientes}$$

OPCIÓN B

a) (1'5 puntos) Hallar el punto simétrico de **A(2 , 0 , 1)** respecto al plano $\pi \equiv x + 2y + z = 2$

Por **A** se traza una recta **r** perpendicular al plano, que tendrá como vector director el del plano, hallándose el punto de corte **P** de esta con aquel que será el punto medio entre el dado y su simétrico **A'**

$$\overrightarrow{v_r} = (1\ ,2\ ,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \Rightarrow Corte\ con\ \pi \Rightarrow (2+\lambda) + 2\cdot 2\lambda + (1+\lambda) = 2 \Rightarrow 2+\lambda+4\lambda+1+\lambda = 2 \Rightarrow$$

$$6\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Rightarrow P\begin{cases} x = 2+\left(-\frac{1}{6}\right) = 2-\frac{1}{6} = \frac{11}{6} \\ y = 2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\ z = 1+\left(-\frac{1}{6}\right) = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{11}{6} = \frac{2+x_{A'}}{2} \Rightarrow 12+6x_{A'} = 22 \Rightarrow 6x_{A'} = 10 \\ -\frac{1}{3} = \frac{0+y_{A'}}{2} \Rightarrow -2 = 3y_{A'} \\ \frac{5}{6} = \frac{1+x_{A'}}{2} \Rightarrow 6+6z_{A'} = 10 \Rightarrow 6z_{A'} = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A'\left(\frac{10}{6}\ ,-\frac{3}{2}\ ,\frac{4}{6}\right) \Rightarrow A'\left(\frac{5}{3}\ ,-\frac{3}{2}\ ,\frac{2}{3}\right)$$

b) (1 punto) Obtener las ecuaciones de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$ en forma paramétrica y en forma continua

$$3x - z = 4 \Rightarrow z = 3x-4 \Rightarrow 2\cdot x + y + 3x - 4 = 3 \Rightarrow y + 5x = 7 \Rightarrow y = 7-5x \Rightarrow$$

$$Ecuación\ paramétrica \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7-5\lambda \\ z = -4+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = x \\ \lambda = \frac{y-7}{5} \\ \lambda = \frac{z+4}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$Ecuación\ continua \Rightarrow x = \frac{y-7}{5} = \frac{z+4}{3}$$

ANÁLISIS

OPCIÓN A

1.- Sean $f(x) = cos\,(3x+1)\ y\ h(x) = sen^2(x)$

a) (0’5 puntos) Calcular $g(x) = (h \circ f)(x)$

b) (0’5 puntos) Comprobar si $g(x)$ es una función par

c) (1’5 puntos) Obtener $g'(x)$ y estudiar si es cierto que $g'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

$a)$

$$g(x) = (h \circ f)(x) \Rightarrow g(x) = h[f(x)] \Rightarrow g(x) = sen^2[cos\,(3x+1)]$$

$b)$

$$g(-x) = sen^2[cos\,\{3(-x)+1\}] = sen^2[cos\,(1-3x)] \neq g(x) = sen^2[cos\,(3x+1)] \Rightarrow No\ es\ \ función\ \ par$$

$c)$

$$g'(x) = 2sen\,[cos\,(3x+1)]\cdot cos[cos\,(3x+1)]\cdot[-\,sen\,(3x+1)]\cdot 3 =$$

$$g'(x) = \text{-}6\cdot cos\,[cos\,(3x+1)]\cdot sin\,[cos\,(3x+1)]\cdot sin(3x+1) = -3\cdot sen\ 2\cdot[cos\,(3x+1)]\cdot sen\,(3x+1)$$

$$g'\left(\frac{1}{3}\right) = -3\cdot sen\ 2\left[cos\left(3\cdot\frac{1}{3}+1\right)\right]\cdot sen\left(3\cdot\frac{1}{3}+1\right) = -3\cdot sen\ 2[cos\,(1+1)]\cdot sen\,(1+1)$$

$$g'\left(\frac{1}{3}\right) = -3\cdot sen\,[2\cdot(cos\ 2)]\cdot sen\ 2 = 2{,}0172146174526486266465773063 01 \neq 0 \Rightarrow$$

No se cumple

2.- Sea $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}}$

a) (0’5 puntos) Calcular su dominio
b) (0’75 puntos) Encontrar los puntos de corte de **f(x)** con el eje **OX** y estudiar si la función es creciente en el intervalo **(0 , 1)**

c) (0’5 puntos) Obtener el limite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x+2}$

d) (0’75 puntos) Hallar $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

a)

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3+2x^2}{x+2}}=\sqrt{\frac{(x+2)x^2}{x+2}}=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}-x & si \quad x<0\\ x & si \quad x\ge 0\end{cases}\Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re$$

b)

$$Cuando\begin{cases} y=0\Rightarrow \dfrac{(x+2)x^2}{x+2}=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow (0\ ,0)\\ x=0\Rightarrow y=\sqrt{\dfrac{(0+2)\cdot 0^2}{0+2}}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{(x+2)\cdot x^2}{x+2}}=|x|=0\Rightarrow (0\ ,0)\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & si \quad x<0\\ 1 & si \quad x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(x)<0\Rightarrow Decreciente\Rightarrow \forall x\in\Re\,/\,x<0\\ f'(x)<0\Rightarrow Creciente\Rightarrow \forall x\in\Re\,/\,x\ge 0\end{cases}\Rightarrow$$

En el intervalo pedido es creciente

c)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}}=\frac{1}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{1}{1+0}=1$$

d)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx=\int_{0}^{-1}x\,dx+\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\left(1^2-0^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[(-1)^2-0^2\right]+\frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

OPCIÓN B

1.- .- a) (1'25 puntos) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(x)\,dx$

$a)$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)\,cos(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-sen^2(x)\right]cos(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(x)\,cos(x)\,dx$$

$$I=\left[sen(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(x)\,cos(x)\,dx=\left[sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-sen(0)\right]-\int_0^1 t^2dt=(1-0)-\frac{1}{3}\cdot\left[t^3\right]_0^1=1-\frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)$$

$$sen\ x=t\Rightarrow cos(x)\,dx=dt\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow t=sen\ 0=0\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=sen\ \frac{\pi}{2}=1\end{cases}$$

$$I=1-\frac{1}{3}\cdot(1-0)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

b) (1'25 puntos) Sea **f(x) = e^{ax}**, con $a\in\Re$. Calcular **$f^{(n)}$(x) – a^n f(x)**, siendo **$f^{(n)}$(x)** la derivada n-ésima de **f(x)**

$$f'(x)=a\cdot e^{ax}\Rightarrow f''(x)=a\cdot a\cdot e^{ax}=a^2\cdot e^{ax}\Rightarrow f'''(x)=a^3\cdot e^{ax}\Rightarrow\cdots\Rightarrow f^{(n)}(x)=a^n\cdot e^{ax}\Rightarrow$$

$$f^{(n)}(x)-a^n\cdot f(x)=a^n\cdot e^{ax}-a^n\cdot e^{ax}=0$$

2.- a) (1’25 puntos) Sea $f(x)=\begin{cases}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}} & x<0\\ \dfrac{x^4+2x+a}{x+1} & x\geq 0\end{cases}$ .Estudiar para que valores del parámetro ***a*** esta función es continua en **x = 0**

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}}=\left(0^2+1\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{1}{x}\cdot x^2}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x}=e^0=1\\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^4+2x+a}{x+1}=\dfrac{0^4+2\cdot 0+a}{0+1}=a\end{cases}\Rightarrow$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=a=\lim_{x\to 0^-}f(x)\Rightarrow a=1$$

b) (1’25 puntos) Entre los números, cuya suma es 36, encontrar aquellos números positivos cuya suma de cuadrados sea mínima.

$$\begin{cases}a+b=36\Rightarrow b=36-a\\ S=a^2+b^2\end{cases}\Rightarrow S=a^2+(36-a)^2=a^2+36^2+a^2-72a=2a^2-72a+1296\Rightarrow$$

$$S=2\cdot\left(a^2-36a+648\right)\Rightarrow S'=\frac{dS}{da}=2\cdot(2a-36)=4\cdot(a-18)\Rightarrow S'=0\Rightarrow 4\cdot(a-18)=0\Rightarrow$$

$$a-18=0\Rightarrow a=18\Rightarrow Como\ S''=\frac{d^2S}{da^2}=4\Rightarrow Mínimo\Rightarrow\begin{cases}a=18\\ b=36-18=18\end{cases}$$